

# PERSAMAAN DIFERENSIAL SILMULTAN

## *Simultaneous Differential Equations*

**ASEP MUHAMAD SAMSUDIN, S.T.,M.T.**

DEPARTEMEN TEKNIK KIMIA  
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS DIPONEGORO  
SEMARANG



# PERSAMAAN DIFERENSIAL

- **Persamaan diferensial** adalah suatu persamaan yang memuat variabel bebas, variabel tak bebas, dan derivatif-derivatif dari variabel tak bebas terhadap variabel bebas
- **Persamaan diferensial** terdiri dari:
  1. Persamaan diferensial biasa
  2. Persamaan diferensial parsial
  3. Persamaan diferensial simultan

# PERSAMAAN DIFERENSIAL

- **PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA**

- Persamaan diferensial yang memuat derivatif-derivatif dari variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas

- $x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - xy = 0$

- **PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL**

- Persamaan diferensial yang memuat derivatif-derivatif dari variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

- $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

# PERSAMAAN DIFERENSIAL

- **PERSAMAAN DIFERENSIAL SIMULTAN**

- Persaman diferensial dengan 2 atau lebih variabel tidak bebas dan 1 variabel bebas

- $\frac{dy}{dt} + 2 \frac{dz}{dt} - y + z = 0$

- $3 \frac{dy}{dt} + 2 \frac{dz}{dt} + y - 2z = t$

- sistem persaman diferensial dengan variabel tidak bebas y dan z dan variabel bebas t

# PERSAMAAN DIFERENSIAL **ORDE 2**

- Pemecahan persamaan diferensial orde 2 memuat jawaban lengkap:

$$\text{Jawab lengkap} = \text{FK} + \text{IK}$$

- **FK** = Fungsi Komplementer (*Complementary Function*) – Jawab homogen
- **IK** = Integral Khusus (*Particular Integral*) – Jawab tak homogen

# PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 2

- Ringkasan Fungsi Komplementer

Persamaan dalam bentuk :  $a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0$

Persamaan karakteristik :  $am^2 + bm + c = 0$

(1) Kedua akar riil dan berbeda,  $m = m_1$  dan  $m = m_2$

Pemecahannya adalah  $y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$

(2) Kedua akarnya riil dan sama,  $m = m_1$  dan  $m = m_1$

Pemecahannya adalah  $y = e^{m_1 x} (A + Bx)$

(3) Kedua akarnya kompleks,  $m = \alpha \pm j\beta$

Pemecahannya adalah  $y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

# PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 2

- Ringkasan Fungsi Komplementer

Persamaan dalam bentuk :  $\frac{d^2 y}{dx^2} \pm n^2 y = 0$

(1) Jika  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + n^2 y = 0$ ,  $m = \pm jn$

Pemecahannya adalah  $y = A \cos nx + B \sin nx$

(2) Jika  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - n^2 y = 0$ ,  $m = \pm n$

Pemecahannya adalah  $y = A \cosh nx + B \sinh nx$

Atau  $y = C e^{nx} + D e^{-nx}$

# PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 2

- Ringkasan Fungsi Integral Khusus

*Jika :*

$$F(x) = k$$

misalkanlah  $y = C$

$$F(x) = kx$$

misalkanlah  $y = Cx + D$

$$F(x) = kx^2$$

misalkanlah  $y = Cx^2 + Dx + E$

$$F(x) = k \sin x / k \cos x$$

misalkanlah  $y = C \cos x + D \sin x$

$$F(x) = k \sinh x / k \cosh x$$

misalkanlah  $y = C \cosh x + D \sinh x$

$$F(x) = e^{kx}$$

misalkanlah  $y = C e^{kx}$

$$F(x) = e^{kx} + p$$

misalkanlah  $y = C e^{kx} + p$



# PERSAMAAN DIFERENSIAL SIMULTAN

## Contoh

1. Tentukan penyelesaian umum untuk  $y$  dan  $z$  untuk:

$$5 \frac{dy}{dx} - 2 \frac{dz}{dx} + 4y - z = e^{-x} \dots (1)$$

$$\frac{dy}{dx} + 8y - 3z = 5e^{-x} \dots (2)$$

# PERSAMAAN DIFERENSIAL SIMULTAN

## Contoh

2. Tentukan penyelesaian umum untuk  $y$  dan  $z$  untuk:

$$\frac{dz}{dx} + 2y = e^x \dots (1)$$

$$\frac{dy}{dx} - 2z = 1 + x \dots (2)$$

Dimana untuk  $x=0$  didapat  $y=1$  dan  $z=2$

# PERSAMAAN DIFERENSIAL SIMULTAN

## Latihan

1

$$\frac{dy}{dx} + 2z = e^{-x},$$
$$\frac{dz}{dx} + 3z = y,$$

Dimana untuk  $x=0$  didapat  $y=1$  dan  $z=0$

$$y = (2x + 1)e^{-x} \quad \text{and} \quad z = xe^{-x}.$$

2

$$\frac{dy}{dx} - z = \sin x,$$
$$\frac{dz}{dx} + y = \cos x,$$

Dimana untuk  $x=0$  didapat  $y=3$  dan  $z=4$

$$y = (x + 4) \sin x + 3 \cos x \quad \text{and} \quad z = (x + 4) \cos x - 3 \sin x.$$