

# PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

## Partial Differential Equations

**ASEP MUHAMAD SAMSUDIN, S.T.,M.T.**

# PENDAHULUAN

- **Persamaan diferensial parsial** adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas.
- **Tingkat (*order*) dari PD parsial** : tingkat tertinggi dari derivatif yang ada dalam PD.
- **Derajat (*degree*) dari PD parsial** : pangkat tertinggi dari turunan tingkat tertinggi yang ada dalam PD.
- **PD parsial** dikatakan **linear** jika hanya memuat derajat pertama dari variabel - variabel bebasnya dan derivatif - derivatif parsialnya

# PENDAHULUAN

- Jika  $z$  adalah variabel terikat (dependent) dan  $x, y$  adalah variabel bebas (independent) maka  $z = f(x, y)$
- Untuk mempermudah penulisan turunan kita bisa menggunakan notasi sebagai berikut :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

# CONTOH

$$1) \frac{dy}{dx} = x + 10$$

$$2) \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$3) xy' + 2y = 5$$

$$4) y''' + 3(y'')^2 + y' = \sin x$$

$$5) (y'')^2 + (y')^3 + 5y = x^2$$

$$6) \frac{\partial z}{\partial x} = z + 2x \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$7) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + 2y$$

1 – 5 adalah persamaan diferensial biasa  
6 – 7 adalah persamaan diferensial parsial

1, 3, 6 adalah order pertama  
2, 5, 7 adalah order kedua  
4 adalah order ketiga

5 adalah persamaan berderajat kedua.  
Selain 5 adalah persamaan berderajat 1

# CONTOH

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$
- Persamaan gelombang satu dimensi
- Persamaan konduksi panas satu dimensi
- Persamaan laplace dua dimensi
- Persamaan poisson dua dimensi
- Persamaan laplace tiga dimensi

# PEMBENTUKAN PD PARSIAL

- Pembentukan persamaan differensial parsial dapat dilakukan dengan dua cara yaitu :
  - A. Eliminasi konstanta (*elimination of arbitrary constants*)
  - B. Eliminasi fungsi (*elimination of arbitrary functions*)

# ELIMINASI KONSTANTA

Contoh :

Bentuklah PD parsial dari :  $z = ax + by + a^2 + b^2$

# ELIMINASI KONSTANTA

Latihan :

Bentuklah PD parsial dari :

1.  $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = a^2$

2.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



# ELIMINASI FUNGSI

Contoh :

Bentuklah PD parsial dari :  $z = f(x^2 - y^2)$

# ELIMINASI FUNGSI

Latihan :

Bentuklah PD parsial dari :

1.  $z = e^{ay} f(x + by)$

2.  $z = f(2x + y) + g(3x - y)$

# PD Parsial Linier Orde 2

Persamaan umum

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + Fz = G$$

- $z$  = variabel tak bebas, merupakan fungsi dari  $x$  dan  $y$
- $x, y$  = variabel bebas dari PD
- $A, B, C, D, E, F, G$  = Koefisien, bisa konstanta atau merupakan fungsi dari  $x$  atau  $y$  tetapi bukan fungsi dari  $z$

# PD Parsial Linier Orde 2

Persamaan umum

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + Fz = G$$

Jika:  $G = 0$  disebut PD homogen

$G \neq 0$  disebut PD non homogen

Jika:  $B^2 - 4ac < 0$  disebut PD Eliptik

$B^2 - 4ac = 0$  disebut PD Parabolis

$B^2 - 4ac > 0$  disebut PD Hiperbolis

# METODE PENYELESAIAN PD PARSIAL

- A. Integral Langsung
- B. Pemisalan  $u = e^{ax+by}$
- C. Pemisahan Variabel

# INTEGRAL LANGSUNG

Mencari penyelesaian umum dengan metoda yang digunakan dalam PD biasa (mengintegralkan masing - masing ruas ke setiap variabel bebasnya).

## Contoh

1. Selesaikan PD:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$  ; jika  $z(x, 0) = x^2$   $z(1, y) = \cos y$
2. Selesaikan PD:  $t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = x^2$  ; jika  $u(x, 1) = \frac{x^3}{6}$  dan  $u(0, t) = 0$

# PEMISALAN $u = e^{ax+by}$

PD parsial linear orde 1 atau 2 dengan A,B,C,D,E,F konstan, PU PD ditentukan dengan memisalkan  $u = e^{ax+by}$  ; a,b konstanta yang harus dicari.

## Contoh

Selesaikan PD Parsial:

1.  $3 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 ; u(x, 0) = 4e^{-x}$
2.  $\frac{\partial v}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ; v(0, y) = 4 \sin y$

# PEMISALAN $u = e^{ax+by}$

## Latihan

Selesaikan PD Parsial:

1.  $2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$

2.  $\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \frac{\partial u}{\partial y};$   $u(0, y) = \sin 2y$

3.  $\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$   $u(x, 0) = x + \cos 3x$

4.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$   $u(0, y) = y; u_x(0, y) = 0$



# METODE PEMISAHAN VARIABEL

$$U = XY, \quad X = X(x) \quad Y = Y(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X'Y; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = XY'$$

## Contoh

Selesaikan PD Parsial:

$$1. \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 4 \frac{\partial U}{\partial y}, \quad U(0, y) = 8e^{-3y}$$

$$2. \quad \frac{\partial U}{\partial x} + U = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad U(x, 0) = 4e^{-3x}$$