MATEMATIKA 2

DERET
Series

ASEP MUHAMAD SAMSUDIN, S.T.,M.T.

DEPARTEMEN TEKNIK KIMIA
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG

BARISAN VS DERET

BARISAN (*Sequences*)

Himpunan besaran u_1, u_2, u_3, … yang disusun dalam urutan tertentu dan masing-masing sukunya dibentuk menurut suatu pola yang tertentu pula, yaitu $u_r = f(r)$

DERET (*Series*)

Dibentuk oleh jumlah suku-suku barisan

CONTOH :

1, 3, 5, 7, …	adalah barisan
1 + 3 + 5 + 7 + …	adalah deret

DERET HITUNG (*Arithmetic Series*)

a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + …

2 + 5 + 8 + 11 + 14 + … dst

$$U_n = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

a = u_1 = suku pertama

U_n = suku ke-n

d = beda (*common difference*) = $U_{n+1} - U_n$

S_n = jumlah n buah suku

DERET HITUNG (*Arithmetic Series*)

Contoh :

Carilah jumlah 20 suku yang pertama dari deret :

10 + 6 + 2 - 2 – 6 ….. Dst

Jawaban :

a = 10 d = 2-6 = -4

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left(2x10 + (20-1)(-4)\right) = -560$$

DERET HITUNG (*Arithmetic Series*)

Latihan soal :

Jika suku ke 7 suatu DH adalah 22 dan suku ke 12 adalah 37, maka:

a. Tentukan deret tersebut
b. Hitung jumlah 50 suku pertama
c. Hitung suku ke 101 dari deret tersebut

RATA-RATA HITUNG (*Arithmetic Mean*)

- Rata-rata (*Mean*) adalah nilai tengah (A) diantara dua buah bilangan (P dan Q),
- Sehingga deret tersebut menjadi P + A + Q membentuk deret hitung

$$A - P = d$$
$$Q - A = d$$
$$A - P = Q - A$$
$$2A = P + Q$$
$$\boxed{A = \frac{(P + Q)}{2}}$$

RATA-RATA HITUNG (*Arithmetic Mean*)

Contoh :
Sisipkanlah 3 buah rata-rata hitung diantara 8 dan 18

Jawaban :
8 + A + B + C + 18
U_1 = a = 8
U_5 = a + 4d = 18
Maka, a = 8 dan d = 2,5; sehingga
A = U_2 = a + d = 10,5
B = U_3 = a + 2d = 13
C = U_4 = a + 3d = 15,5

Sehingga rata-rata hitung yang dicari adalah 10,5; 13; 15,5

RATA-RATA HITUNG (*Arithmetic Mean*)

Latihan Soal :

a. Sisipkanlah 3 buah rata-rata hitung diantara 12 dan 21,6
b. Sisipkan 8 buah rata-rata hitung diantara 2,4 dan 33,9

DERET UKUR (*Geometric Series*)

$a + a.r + a.r^2 + a.r^3 + \ldots$ dst

$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$ dst

$$\boldsymbol{U_n = ar^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$$

a = u_1 = suku pertama

U_n = suku ke-n

S_n = jumlah n buah suku

r = rasio (*common ratio*) = $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

DERET UKUR (*Geometric Series)*

Contoh :

Untuk deret 8 + 4 + 2 + 1 + ½ + … dst, tentukan jumlah 8 suku pertama

Jawaban :

8 + 4 + 2 + 1 + ½ + … dst

a = 8   r = ½

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_8 = \frac{8(1-0{,}5^8)}{1-0{,}5} = 16\,\frac{255}{266} = \frac{255}{16} = 15\tfrac{15}{16}$$

DERET UKUR (*Geometric Series)*

Latihan Soal:

Jika suku ke 5 suatu DU adalah 162 dan suku ke 8 nya adalah 4374, maka :

a. Tentukan deret tersebut
b. Hitunglah suku ke 10
c. Hitunglah jumlah 10 suku pertama dari deret tersebut
d. Hitunglah jumlah suku ke 7 sampai 12

RATA-RATA UKUR (*Geometric Mean*)

- Rata-rata (*Mean*) adalah nilai tengah (A) diantara dua buah bilangan (P dan Q),
- Sehingga deret tersebut menjadi P + A + Q membentuk deret ukur

$$\frac{A}{P} = r$$

$$\frac{Q}{P} = r$$

$$\frac{A}{P} = \frac{Q}{A}$$

$$\boldsymbol{A = \sqrt{P.Q}}$$

RATA-RATA UKUR (*Geometric Mean*)

Contoh Soal:

Sisipkah 3 buah rata-rata ukur untuk 5 dan 405

Jawaban :

Deret : 5 + A + B + C + 405

$U_1 = a = 5$

$U_5 = a.r^4 = 405$, maka $r = 3$

$A = U_2 = ar = 5.3 = 15$

$B = U_3 = ar^2 = 5.3^2 = 45$

$C = U_4 = ar^2 = 5.3^3 = 135$

RATA-RATA UKUR (*Geometric Mean*)

Latihan Soal:

a. Sisipkan 4 buah rata-rata ukur diantara 5 dan 1215
b. Sisipkan 5 buah rata-rata ukur diantara 20 dan 81920

DERET PANGKAT BILANGAN ASLI

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n = \sum_{1}^{n} r$$

$$\boxed{\sum_{1}^{n} \mathrm{r} = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + n^2 = \sum_{1}^{n} r^2$$

$$\boxed{\sum_{1}^{n} \mathrm{r}^2 = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(2\mathrm{n}+1)}{6}}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + n^3 = \sum_{1}^{n} r^3$$

$$\boxed{\sum_{1}^{n} \mathrm{r}^3 = \left(\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}\right)^2}$$

DERET PANGKAT BILANGAN ASLI

Contoh Soal:

1. Hitunglah jumlah 20 suku deret 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + … dst
2. Hitunglah jumlah deret $\sum_{n=1}^{5} n(3+2n)$

DERET PANGKAT BILANGAN ASLI

Latihan Soal:

1. Hitunglah jumlah deret $\sum_{n=1}^{5}(5n + n^3)$
2. Hitunglah jumlah 30 suku deret $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots$

DERET TAK BERHINGGA

- **Pada deret hitung**

  jumlah tak berhingga suku tak dapat dihitung karena hasilnya selalu tak berhingga

- **Pada deret ukur**

  Jika |r|<1, maka :

$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - r}$$

DERET TAK BERHINGGA

Latihan Soal:

Tinjaulah deret tak berhingga dari deret

20 + 4 + 0,8 + 0,16 + 0,032 + … dst

DERET KONVERGEN & DIVERGEN

- **DERET KONVERGEN (MENGUMPUL)**

  Deret yang jumlah n sukunya (S_n) menuju ke sebuah harga tertentu jika $n \to \infty$

- **DERET DIVERGEN**

  Deret yang jumlah sukunya (S_n) tidak menuju ke sebuah harga tertentu jika $n \to \infty$

DERET KONVERGEN & DIVERGEN

Contoh:

1. Tinjaulah deret tak berhingga $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + \ldots$ dst
2. Tinjaulah deret tak berhingga $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$ dst

KAIDAH UJI KEKONVERGENAN

KAIDAH 1

"suatu deret tidak mungkin konvergen kecuali bila suku sukunya akhirnya menuju nol".

$\lim_{n\to\infty} U_n = 0$: deret mungkin konvergen

$\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$: deret pasti divergen

KAIDAH UJI KEKONVERGENAN

KAIDAH 1

1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots$ Mungkin Konvergen

2. $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$ Divergen

KAIDAH UJI KEKONVERGENAN

KAIDAH 2 : UJI PERBANDINGAN

"Suatu deret dengan suku suku positif akan konvergen jika suku sukunya lebih kecil daripada suku suku seletak deret positif pembanding".

Deret pembanding: $$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

- jika p > 1 : deret konvergen
- jika p ≤ 1 : deret divergen

KAIDAH UJI KEKONVERGENAN

Contoh:

Tinjaulah deret tak berhingga $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$

Tinjaulah deret tak berhingga $\frac{1}{1,2} + \frac{1}{2,3} + \frac{1}{3,4} + \cdots$

KAIDAH UJI KEKONVERGENAN

KAIDAH 3:

Uji pembagian D'Alembert untuk deret bersuku positif

Jika:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$$: deret konvergen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$$: deret divergen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$$: tidak ada kesimpulan (dicek dengan kaidah lainnya)

KAIDAH UJI KEKONVERGENAN

Contoh:

- Tinjaulah deret tak berhingga $\frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \cdots$

KAIDAH UJI KEKONVERGENAN

LATIHAN:

Periksalah apakah deret deret berikut konvergen atau divergen?

$a.\ \frac{2}{1^2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{2^4}{4^2} + \cdots$

$b.\ U_n = \frac{(1+2n^2)}{(1+n^2)}$

DERET PANGKAT

DERET MACLAURIN

Digunakan untuk membentuk sebuah deret

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}.f''(0) + \frac{x^3}{3!}.f'''(0) + \ldots$$

DERET PANGKAT

CONTOH:

Buatlah deret untuk ln (1+x)

LATIHAN:

Jabarkan sin^2 x dalam deret pangkat x dengan pangkat yang semakin bertambah

DERET PANGKAT

DERET BAKU

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots dst$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots dst$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots dst$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots dst$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots dst$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots dst$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots dst$$

DERET PANGKAT

CONTOH:

Tentukan tiga suku pertama dari deret untuk $e^x \ln(1+x)$

LATIHAN:

Tentukan tiga suku pertama dari deret untuk $e^x Sinhx$

DERET BINOMIAL

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$